FGN, An 2	Expression des $\zeta(2k)$	L 230 L 235 L 243 L 246 L 213

Déf° : La fonction $f : z \longmapsto \dfrac{z}{e^z - 1}$ est DSE en 0.

On définit les nombres de Bernoulli b_n par : $\forall z \in D(0, 2\pi), f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \frac{z^n}{n!}$

Prop : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k \in \mathbb{Q}$. De plus, $b_0 = 1$; $b_1 = -\frac{1}{2}$; $b_2 = \frac{1}{6}$

Dém° : On a, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) \times (e^z - 1) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n z^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k \cdot z^n}{k!(n-k)!}$

d'où, $\forall n \geqslant 2$, $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k(n-k)!} = 0$ puis $\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} b_k = -n\, b_{n-1}$

Ainsi, $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = -\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k \in \mathbb{Q}$ par réc.

Th : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2k) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(2\pi)^{2k}}{2.(2k)!} b_{2k}$.

Démonstration : ① Soit $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$.

Développons en série de Fourier la fonction φ, 2π-périodique, définie sur $]-\pi, \pi]$ par $\varphi(x) = e^{\frac{zx}{2\pi}}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{zx}{2\pi}} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\left(\frac{z}{2\pi} - in\right)x} dx$

$c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\frac{z}{2\pi} - in} \left[e^{\frac{zx}{2\pi}} e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{z - 2i\pi n} \cdot \left(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}} \right) \cdot (-1)^n$

φ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le th de Dirichlet,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}\left(\varphi(x^+) - \varphi(x^-)\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot e^{inx}}{z - 2i\pi n} \left(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}\right)$

En évaluant en $x = \pi$:

$$\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{z}{2}} + e^{\frac{z}{2}}\right) = \left(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z + 2i\pi n}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} = \frac{1}{z} + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{z^2+4\pi^2n^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\,\frac{e^{z}+1}{e^{z}-1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{e^{z}-1} = \frac{1}{z} + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{z^2+4\pi^2n^2}$$

puis $\underline{f(z) = \dfrac{z}{e^{z}-1} = 1 - \dfrac{z}{2} + 2\cdot\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2}}$

② Développons en série entière la fraction $\dfrac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2}$.

$\forall z \in D(0,2\pi)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|\dfrac{z}{2\pi n}\right| < 1$ donc :

$$\frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2} = \frac{z^2}{4\pi^2n^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z^2}{4\pi^2n^2}} = \frac{z^2}{4\pi^2n^2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{z^{2k}}{(4\pi^2n^2)^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{z^{2(k+1)}}{(4\pi^2n^2)^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}.$$

Considérons $u_{n,k} = (-1)^{k-1}\cdot\dfrac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$, $k,n\in\mathbb{N}^*$.

On a : $\displaystyle\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^{*2}}|u_{n,k}| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|z|^{2k}}{(2\pi n)^{2k}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^2}{(2\pi n)^2-|z|^2} < \infty$

D'après le th de Fubini-Lebesgue,

$\forall z \in D(0,2\pi)\setminus\{0\}$, $f(z) = 1 - \dfrac{z}{2} + 2\cdot\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$

$$f(z) = 1-\frac{z}{2}+2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}\right)z^{2k}$$

L'égalité est encore vérifiée en $z=0$.

Ainsi, $\forall z\in D(0,2\pi)$, $f(z) = 1-\dfrac{z}{2}+2\cdot\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}\,z^{2k}$.

Par unicité du développement en série entière,

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{b_{2k}}{(2k)!} = 2\cdot\dfrac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}}\cdot\zeta(2k) \Leftrightarrow \zeta(2k) = (-1)^{k-1}\cdot\dfrac{(2\pi)^{2k}}{2\cdot(2k)!}\cdot b_{2k}$

En particulier, $\zeta(2) = \dfrac{4\pi^2}{2\cdot2}\cdot\dfrac{1}{6} = \underline{\dfrac{\pi^2}{6}}$

$$\zeta(4) = -\frac{2^4\cdot\pi^4}{2\cdot4!}\cdot\frac{-1}{30} = \underline{\frac{\pi^4}{90}}.$$